Un complément à la théorie de l'“intégration non commutative”

Par I. KOVÁCS à Szeged

Préliminaires

Dans ce travail on désignera par M un anneau d'opérateurs dans un espace hilbertien complexe $\mathfrak{H}$. La partie positive de M, c'est-à-dire l'ensemble des éléments hermitiens $\geqq 0$ de M sera désignée par M^+.

M est dite de genre dénombrable[1]) si toute famille de projecteurs[2]) de M non nuls et deux à deux orthogonaux est dénombrable.

Une forme linéaire ϱ sur M est dite positive si l'on a $\varrho(T) \geqq 0$ pour tout $T \in M^+$. Lorsqu'il en est ainsi, on dit que ϱ est normale si, pour tout ensemble filtrant croissant $F \subset M^+$ de borne supérieure $T \in M^+$, $\varrho(T)$ est la borne supérieure de $\varrho(F)$. On dit que ϱ est fidèle si les conditions $\varrho(T) = 0$, $T \in M^+$, entraînent $T = 0$.

Soit ϱ une forme linéaire positive sur M. Les conditions suivantes sont équivalentes (cf. [3], chap. I, § 3, th. 1; § 4, th. 1 et exerc. 9):

(i) ϱ est normale;

(ii) pour toute famille (E_ι) de projecteurs de M deux à deux orthogonaux, on a $\varrho(\sum_\iota E_\iota) = \sum_\iota \varrho(E_\iota)$;

(iii) la restriction de ϱ à la boule unité M_1 de M est faiblement (fortement) continue.

Dans ce qui suit nous supposerons que M est fini (ceci veut dire qu'il ne contient que des projecteurs finis[3])) de genre dénombrable. En ce cas on

---

[1]) Dans la théorie de l'intégration des hypothèses de dénombrabilité sur l'espace de base sont utiles. La considération des anneaux d'opérateurs de genre dénombrable présente une utilité analogue dans la théorie de l' “intégration non commutative”.

[2]) Le mot “projecteur” est pris toujours au sens de “projecteur orthogonal”.

[3]) Un projecteur P dans un anneau d'opérateurs M est dit fini si M ne contient aucun opérateur partiellement isométrique de projecteur initial P et de projecteur final $Q \leqq P$, $Q \neq P$.

montre ([3], chap. III, § 4) qu'il existe sur M une forme linéaire positive normale fidèle φ possédant la propriété suivante: pour tout $R \in$ M on a $\varphi(R^*R) = \varphi(RR^*)$. On appelle φ une trace normale finie fidèle sur M.

On peut définir l'espace vectoriel complexe, désigné par $L^1(\varphi)$, des opérateurs (non nécessairement continus) intégrables par rapport à φ. $L^1(\varphi)$ contient M et φ peut être prolongée en une forme linéaire positive sur $L^1(\varphi)$ désignée par la suite par la même lettre φ. $L^1(\varphi)$ et φ ont les propriétés suivantes: si $S \in$ M et $T \in L^1(\varphi)$ on a ST, $TS \in L^1(\varphi)$ et $\varphi(ST) = \varphi(TS)$; si $T \in L^1(\varphi)$ on a T^*, $|T| \in L^1(\varphi)$.[4]) On démontre que l'espace $L^1(\varphi)$, muni de la norme $T \to \varphi(|T|)$, est un espace de Banach complexe. M est partout dense dans $L^1(\varphi)$ et le dual de $L^1(\varphi)$ s'identifie à l'espace de Banach complexe M muni de la norme $S \to \|S\|$[5]) (cf. [2] et [5]). La norme d'un élément $T \in L^1(\varphi)$ sera désignée par $\|T\|_1$.

L'ensemble des projecteurs de M sera désigné par M_P.

Le théorème et son corollaire

La théorie générale de l'intégration pour des opérateurs dans un espace hilbertien complexe, développée en particulier par J. DIXMIER [2] et I. E. SEGAL [5], montre que la théorie des anneaux d'opérateurs généralise dans une certaine mesure la théorie de l'intégration ordinaire. Ainsi on parle parfois d' "intégration non commutative". En recherchant les analogies entre la théorie des anneaux d'opérateurs et la théorie de l'intégration ordinaire, nous venons d'obtenir le théorème suivant:

Théorème. *Soit $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ une suite de formes linéaires positives normales sur* M. *Supposons que la limite $\varrho(T) = \lim_{n \to \infty} \varrho_n(T)$ existe pour tout $T \in$* M. *$\varrho(T)$ est alors elle-même une forme linéaire positive normale sur* M.

Ce théorème peut être regardé dans une certaine mesure comme le pendant "non commutatif" du théorème suivant de VITALI—HAHN—SAKS dans la théorie de l'intégration ordinaire: *Soit (X, S, μ)[6]) un espace mesuré, de mesure μ non-négative, et soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ une suite de fonctions d'ensemble, à valeurs complexes, additives et absolument continues par rapport à μ sur S.*

---

[4]) Si T est un opérateur fermé à domaine dense on appelle décomposition polaire de T la décomposition $T = U|T|$, où $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ et U est partiellement isométrique admettant pour sous-espace initial l'adhérence de $|T|\mathfrak{H}$. Si $T \in$ M on a $|T|$, $U \in$ M.

[5]) $\| \; \|$ est la norme usuelle des opérateurs continus.

[6]) Pour la terminologie de la théorie de la mesure nous renvoyons le lecteur à [1].

Supposons que la limite $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(E)$ *existe pour tout ensemble* $E \in S$. *Alors*

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \lambda_n(E) = 0,$$

uniformément par rapport à n ([1] III, 7. 2).

Nous démontrons d'abord deux lemmes:

Lemme 1. *Dans la métrique induite*[7] *par* $L^1(\varphi)$ *l'ensemble* M_P *est complet.*

Démonstration. Soit $P_1, P_2, P_3, \ldots$ une suite fondamentale d'éléments de M_P, c'est-à-dire pour laquelle on a $\lim_{m,n\to\infty} \|P_m - P_n\|_1 = 0$. La convergence de $\|P_m - P_n\|_1 = \varphi(|P_m - P_n|)$ vers zéro implique la convergence forte de $|P_m - P_n|$ vers zéro (cf. [3], chap. I, § 4, prop. 4). Soit $P_m - P_n = U_{m,n}|P_m - P_n|$ la décomposition polaire de $P_m - P_n$ et soit x un élément quelconque de $\mathfrak{H}$. L'inégalité

$$\|(P_m - P_n)x\| = \|U_{m,n}|P_m - P_n|x\| \leqq \||P_m - P_n|x\|$$

montre que la suite $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ tend fortement à un élément de M qui est un projecteur nécessairement, ce qui achève la démonstration du lemme 1.

Lemme 2. *Soit* ϱ *un forme linéaire positive normale sur* M. *La condition* $\|P - P_0\|_1 = \varphi(|P - P_0|) \to 0$ *sur* M_P *entraîne* $\varrho(P) \to \varrho(P_0)$.

Démonstration. Le raisonnement de la démonstration du lemme 1 montre que la condition $\varphi(|P - P_0|) \to 0$ sur M_P entraîne la convergence forte de $P - P_0$ vers zero. Alors, notre assertion résulte de la continuité forte de ϱ sur M_1 (cf. Préliminaires).

Cela étant, passons à la

Démonstration du théorème[8]. Il est clair que ϱ est une forme linéaire positive sur M. Pour achever la démonstration, prouvons d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta > 0$ tel que sur M_P la condition $\varphi(P) < \delta$ entraîne $\varrho_n(P) \leqq \varepsilon$ pour tout n.

D'après le lemme 2, chaque ϱ_n est continue sur l'espace métrique complet M_P. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, les ensembles

$$\mathsf{M}_{m,n} = \{P \in \mathsf{M}_P\colon\ |\varrho_m(P) - \varrho_n(P)| \leqq \varepsilon\} \qquad (m, n = 1, 2, \ldots),$$

$$\mathsf{M}_q = \bigcap_{m,n \geqq q} \mathsf{M}_{m,n} \qquad (q = 1, 2, \ldots)$$

[7]) Par la métrique de M_P nous entendrons dans ce qui suit cette métrique induite.

[8]) L'idée fondamentale de la démonstration est analogue à celle de la démonstration usuelle du théorème de Vitali—Hahn—Saks.

sont fermés dans l'espace métrique complet M_P. Comme $\lim_{n\to\infty} \varrho_n(P)$ existe pour tout $P \in \mathsf{M}_P$, on a $\mathsf{M}_P = \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathsf{M}_q$.

D'après un théorème de catégorie de BAIRE (cf. [1], I, 6. 9), l'un des M_q a un point intérieur. Donc il existe un nombre entier p, un nombre positif r et un projecteur $Q_p \in \mathsf{M}_P$ tels que

$$|\varrho_m(P) - \varrho_n(P)| \leqq \varepsilon \qquad (m, n \geqq p)$$

pour tout P de la boule

$$K = \{P \in \mathsf{M}_P\colon \quad \|P - Q_p\|_1 < r\}.$$

Pour des projecteurs G et H de M, désignons par $G \cup H$ le plus petit projecteur majorant G et H. Évidemment $G \cup H$ appartient à M. En vertu du lemme 7. 3. 4. de [4], $(G \cup H) - H \precsim G$[9]. Il en résulte que

$$\|(G \cup H) - H\|_1 = \varphi((G \cup H - H) \leqq \varphi(G),$$

$$\|((G \cup H) - G) - H\|_1 = \|((G \cup H) - H) - G\|_1 \leqq$$

$$\leqq \|(G \cup H) - H\|_1 + \|G\|_1 \leqq 2\varphi(G).$$

En appliquant ces inégalités et le lemme 2, on peut choisir un nombre δ $(0 < \delta < r)$ tel que pour tout $F \in \mathsf{M}_P$ satisfaisant à la condition $\varphi(F) < \delta$ on ait

$$\varrho_n(F) < \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots, p)$$

et

$$F \cup Q_p, \ [(F \cup Q_p) - F] \in K.$$

Alors, l'identité

$$\varrho_n(F) = \varrho_p(F) + [\varrho_n(F) - \varrho_p(F)] =$$

$$= \varrho_p(F) + [\varrho_p((F \cup Q_p) - F) - \varrho_n((F \cup Q_p) - F)] +$$

$$+ [\varrho_n(F \cup Q_p) - \varrho_p(F \cup Q_p)]$$

montre que $\varrho_n(F) \leqq 3\varepsilon$ pour tout n.

Montrons finalement que ϱ est normale. Il suffit de prouver que pour toute suite décroissante $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ de M_P telle que $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = 0$,[10]) $\varrho(P_n)$ tend vers

[9]) Deux projecteurs P et Q de M sont dits équivalents, et l'on écrit $P \sim Q$, s'il existe un élément U de M tel que $U^*U = P$, $UU^* = Q$. On écrit $P \prec Q$, ou $Q \succ P$, s'il existe un projecteur de M équivalent à P et majoré par Q.

[10]) Pour des projecteurs $P_1, P_2, \ldots$ de M, $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$ désigne le projecteur correspondant au sous-espace $\bigcap_{n=1}^{\infty} (P_n \mathfrak{H})$.

zéro. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Il existe un nombre entier $N(\varepsilon)$ tel que, si $m \geqq N(\varepsilon)$, on a

$$|\varrho_n(P_m)| \leqq \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ainsi $|\varrho(P_m)| \leqq \varepsilon$ pour $m \geqq N(\varepsilon)$, ce qui établit notre assertion.

Corollaire. *La partie positive de $L^1(\varphi)$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments hermitiens $\geqq 0$ de $L^1(\varphi)$, est faiblement complète* [11]).

Démonstration. Soit $T_1, T_2, \ldots$ une suite d'éléments hermitiens non-négatifs de $L^1(\varphi)$ satisfaisant à la condition suivante: pour tout $T \in \mathsf{M}$

$$\lim_{m,\, n \to \infty} [\varphi(T_m T) - \varphi(T_n T)] = 0.$$

Pour tout n, $\varrho_n(T) = \varphi(T_n T)$ est une forme linéaire positive normale sur M (cf. [5], p. 423 et p. 430). D'après notre théorème, $\varrho(T) = \lim_{n \to \infty} \varrho_n(T)$ est une forme linéaire positive normale sur M. En vertu du théorème de Radon—Nikodým dans les anneaux d'opérateurs (cf. [5], th. 14), il existe un opérateur hermitien non-négatif A de $L^1(\varphi)$ tel que

$$\varphi(AT) = \varrho(T) = \lim_{n \to \infty} \varrho_n(T) = \lim_{n \to \infty} \varphi(T_n T),$$

ce qui achève la démonstration.

Bibliographie

[1] N. Dunford—J. T. Schwartz, *Linear operators. Part I: General theory* (New York, 1958).

[2] J. Dixmier, Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, **81** (1953), 9—39.

[3] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann)* (Paris, 1957).

[4] F. J. Murray—J. von Neumann, On rings of operators, *Annals of Math.*, **37** (1936), 116—229.

[5] I. E. Segal, A non commutative extension of abstract integration, *Annals of Math.*, **57** (1951), 401—457.

(Reçu le 3 septembre 1959)

[11]) La topologie faible de $L^1(\varphi)$ est la topologie faible définie par son dual M.